

## Aplicação do segundo teorema de Castigliano na solução de estruturas hiperestáticas

Application of the Castigliano's second theorem in the solution of statically indeterminate plane structures.

A.M. Ilkiu<sup>a †</sup>

<sup>a</sup> UNITAU – Universidade de Taubaté, SP, Brasil

<sup>†</sup> Autor para correspondência: [ilkiu@uol.com.br](mailto:ilkiu@uol.com.br)

### RESUMO

No presente artigo, apresentam-se estudos de casos de análise de estruturas estaticamente indeterminadas ou hiperestáticas, utiliza-se o segundo teorema de Castigliano e o “Theorem of Last Work” na determinação das constantes hiperestáticas. Consideram-se modelos de estruturas sujeitos a carregamentos diversos onde, as condições de contorno nos apoios externos sugeridos como redundante são identificadas e as incógnitas ou constantes hiperestáticas determinadas. Destacam-se as análises das equações clássicas apresentadas por Timoshenko S.P. e Young D.H. (1965) e das teorias elásticas no desenvolvimento dos modelos matemáticos. Utiliza-se da simulação numérica, através do programa de Elementos Finitos (FEA) Ansys® onde, comparam-se os resultados numéricos e analíticos que foram obtidos pelas equações do presente trabalho.

### ABSTRACT

The paper present is to analyze statically indeterminate plane structures, using the Castigliano's second theorem and the “Theorem of Last Work” in the determination of the statically indeterminate constants. For this, we consider models of structures subjected to different loads where the boundary conditions in the external supports are defined, the statically indeterminate constants being determined as unknowns. Noteworthy are the analysis of the classical equations presented for Timoshenko S.P. e Young D.H. (1965) of the elastic theories in the development of the mathematical models. We use numerical simulation using the finite element program (FEA) Ansys®, where we compare the numerical and analytical results obtained by the equations of the present work.

### Palavras-chave:

Estruturas; Segundo Teorema de Castigliano; Elementos Finitos.

### Keywords:

Structures; Castigliano's second theorem; Finite Elements.

## 1. Introdução

Em 1879, Alberto Castigliano, um engenheiro ferroviário italiano, publicou um livro no qual ele delineou um método para determinar os deslocamentos vertical, horizontal e angular em um determinado ponto de uma estrutura estática, seja ela uma treliça, viga ou pórtico. Esse método, que é chamado de segundo teorema de Castigliano, ou o método do trabalho mínimo, aplica-se somente a estruturas que têm temperatura constante e material com comportamento elástico linear. Se o deslocamento de um ponto vai ser determinado, o teorema enuncia que ele é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação na estrutura em relação a uma força atuando em um ponto e na direção do deslocamento. De maneira similar, o deslocamento angular em um ponto em uma estrutura é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação na estrutura em relação a um momento binário atuando no ponto e na direção do deslocamento angular.

Utilizando o método descrito é possível determinar as constantes hiperestáticas e ou os deslocamentos, em pontos específicos, em uma determinada estrutura, sendo possível sua solução analítica utilizando-se as equações clássicas da estática das estruturas. Este método vem sendo utilizado desde sua publicação, ganhando destaque quando da utilização de métodos numéricos na solução de estruturas complexas.

Quando um material elástico sofre deformações, ocorre a transformação do trabalho externo devido as cargas externas em energia de deformação. Esta energia é acumulada no material durante a deformação, que após liberada, faz com que o material volte ao seu estado original de repouso. Para derivar o segundo teorema de Castigliano, considere uma estrutura de qualquer forma arbitrária que é sujeita a uma série de  $n$  forças  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Tendo em vista que o trabalho externo realizado por essas cargas é igual à energia de deformação interna armazenada na estrutura, podendo escrever,

$$U_i = U_e \quad (1)$$

O trabalho externo é uma função das cargas externas. Desse modo,

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (2)$$

Se qualquer uma das forças for aumentada por um montante diferencial, o trabalho também é aumentado de tal maneira que a nova energia de deformação torna-se,

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_i} dP_i \quad (3)$$

Este valor, no entanto, não deve depender da sequência na qual as forças são aplicadas à estrutura. Por exemplo, se primeiro aplicarmos  $dP_i$  à estrutura, então isso vai fazer com que o corpo seja deslocado um montante diferencial  $d\Delta_i$  na direção de  $dP_i$ . Sendo  $U_e = 1/2 P \Delta$ , o incremento de energia de deformação seria  $1/2 dP_i d\Delta_i$ . Essa quantidade, entretanto, é um diferencial de segunda ordem e pode ser desprezada, conforme adotado no presente trabalho. A aplicação adicional das cargas  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , que deslocam o corpo  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , resulta na energia de deformação.

$$U_i + dU_i = U_i + dP_i \Delta_i \quad (4)$$

A Equação (3) representa a energia de deformação no corpo determinada primeiro aplicando as cargas  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , e a Equação (4) representa a energia de deformação primeiro aplicando  $dP_i$ . Tendo em vista que estas duas equações têm que ser iguais, é necessário que,

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \quad (5)$$

Provando-se assim o teorema, isto é, o deslocamento  $\Delta_i$  na direção de  $P_i$  é igual à primeira derivada parcial da energia de deformação em relação a  $P_i$ .

A Equação (4) é um enunciado relativo à compatibilidade da estrutura e exige apenas forças conservativas sejam consideradas para a análise. Estas forças realizam trabalho que é independente da trajetória e, portanto, não cria perda de energia. Tendo em vista que forças causando uma resposta elástica linear são conservativas, o teorema é restrito ao comportamento elástico linear do material.

Dentre os trabalhos sobre a aplicação do segundo teorema de Castigliano, destacam-se as teorias clássicas de Timoshenko S.P. e Young D.H. [1] e os trabalhos de Hibbeler R.C. [2], entre outros.

### 1.1. Objetivos

Neste contexto, o presente trabalho tem como principal objetivo aplicar o Segundo Teorema de Castigliano na solução de estruturas estaticamente determinada, como ferramenta para a obtenção dos coeficientes de flexibilidade para a determinação da equação de compatibilidade dos deslocamentos.

## 2. Metodologia

Foram considerados estudos de casos para apresentar a aplicação do método apresentados. Para tanto foram analisados os seguintes casos: Viga, pórtico e treliça estaticamente indeterminados, apoiados em molas elásticas e um arco parabólico simétrico estaticamente indeterminado.

Para estes casos foram realizadas simulações numéricas utilizando o programa de elementos finitos Ansys® [3], verificando-se as constantes hiperestáticas para a solução dos referidos casos.

## 3. Estudo de casos

### 3.1. Simbologia

Nos respectivos estudos de casos, para o cálculo dos coeficientes de flexibilidade, será utilizada a equação do segundo Teorema de Castigliano. A simbologia adotada está descrita a seguir:

$\delta_{i0}$  – Deslocamento no ponto onde esta aplicada a carga (constante hiperestática)  $X_i$  devido a carga real da estrutura, “ $i$ ” varia de 1 até o número total de constantes hiperestáticas;

$\delta_{ii}$  – Deslocamento no ponto onde esta aplicada a carga  $X_i$  devido a própria carga  $X_i$ ;

$\delta_{ij}$  – Deslocamento no ponto onde esta aplicada a carga  $X_i$  devido a carga  $X_j$ ;

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$  – Reciprocidade dos deslocamentos;

$k_i$  – Constante elástica do apoio elástico, constante de mola;

$X'_i$  – Carga virtual no ponto de aplicação da carga  $X_i$ ;

$n$  – Número cortes para a determinação dos esforços internos;

$m$  – Número de vão ou segmentos da estrutura;

$M_n$  – Esforço interno momento fletor no corte “ $n$ ”;

$N_n$  – Esforço interno normal no corte “ $n$ ”;

$T_n$  – Esforço interno de torção no corte “ $n$ ”;

$Q_n$  – Esforço interno cortante no corte “ $n$ ”;

Da seção transversal e do material por vão ou segmento da estrutura, tem-se:

$I_m$  – Momento de inércia;

$A_m$  – Área;

$J_m$  – Momento polar de inércia;

$Av_m$  – Área efetiva de cisalhamento;

$E$  – Módulo de elasticidade do material;

$G$  – Módulo de elasticidade transversal do material;

$EI_m$  – Rigidez à flexão;

$EA_m$  – Rigidez ao esforço normal;

$GJ_m$  – Rigidez a torção;

$GA_v_m$  – Rigidez ao cisalhamento;

$L$  – Intervalo de integração ou comprimento do segmento da estrutura.

As equações principais utilizadas no cálculo dos coeficientes de flexibilidade:

Coefficiente de flexibilidade no ponto onde esta aplicada a carga “ $i$ ” devido ao carregamento real:

$$\delta_{i0} = \sum_1^n \left( \int_L \frac{M_n}{EI_m} \frac{\partial M_n}{\partial X'_i} dx_n + \int_L \frac{N_n}{EA_m} \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} dx_n + \int_L \frac{T_n}{GJ_m} \frac{\partial T_n}{\partial X'_i} dx_n + \int_L \frac{Q_n}{GAv_m} \frac{\partial Q_n}{\partial X'_i} dx_n \right) \quad (6)$$

Coefficiente de flexibilidade no ponto onde esta aplicada a carga “ $i$ ” devido a própria carga “ $i$ ”:

$$\delta_{ii} = \frac{1}{k_i} + \sum_1^n \left[ \int_L \frac{1}{EI_m} \left( \frac{\partial M_n}{\partial X'_i} \right)^2 dx_n + \int_L \frac{1}{EA_m} \left( \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} \right)^2 dx_n + \int_L \frac{1}{GJ_m} \left( \frac{\partial T_n}{\partial X'_i} \right)^2 dx_n + \int_L \frac{1}{GAv_m} \left( \frac{\partial Q_n}{\partial X'_i} \right)^2 dx_n \right] \quad (7)$$

Coefficiente de flexibilidade no ponto onde esta aplicada a carga “ $i$ ” devido a carga “ $j$ ”:

$$\delta_{ij} = \sum_1^n \left( \int_L \frac{1}{EI_m} \frac{\partial M_n}{\partial X'_i} \frac{\partial M_n}{\partial X'_j} dx_n + \int_L \frac{1}{EA_m} \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} \frac{\partial N_n}{\partial X'_j} dx_n + \int_L \frac{1}{GJ_m} \frac{\partial T_n}{\partial X'_i} \frac{\partial T_n}{\partial X'_j} dx_n + \int_L \frac{1}{GAv_m} \frac{\partial Q_n}{\partial X'_i} \frac{\partial Q_n}{\partial X'_j} dx_n \right) \quad (8)$$

Sendo que, após as respectivas derivadas parciais, as cargas quando definidas como virtuais  $X'_i$  são iguais a zero, caso contrário será igual ao valor da carga real aplicada.

Após determinar os coeficientes de flexibilidade, deve-se aplicar a equação de compatibilidade dos deslocamentos para obter as constantes hiperestáticas. Em casos específicos, onde não há apoio elástico mas apenas apoios rígidos, onde os respectivos deslocamentos são iguais a zero, pode-se aplicar o “Theorem of Last Work” para a determinação das constantes hiperestáticas. Portanto, as equações de compatibilidade dos deslocamentos e para o “Theorem of Last Work” são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1\eta}X_\eta &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2\eta}X_\eta &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \delta_{\eta 0} + \delta_{\eta 1}X_1 + \delta_{\eta 2}X_2 + \dots + \delta_{\eta \eta}X_\eta &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

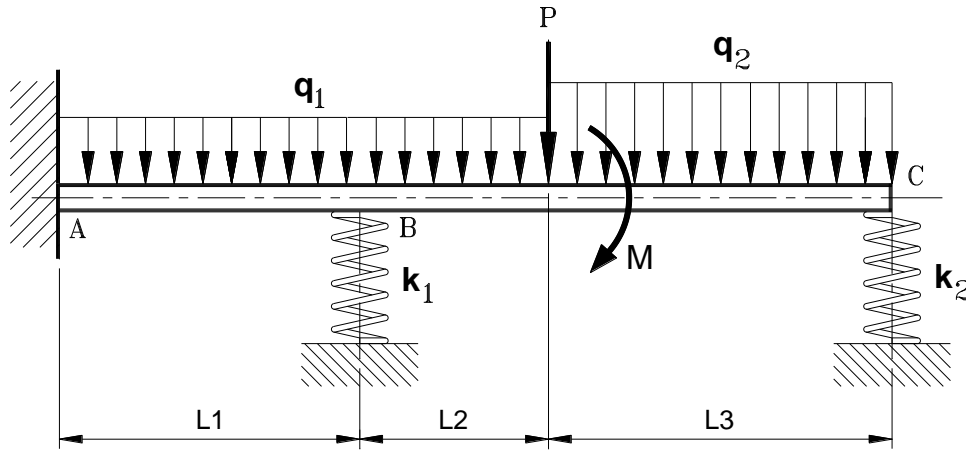
$$\delta_{i0} = 0 = \sum_1^n \left( \int_L \frac{M_n}{EI_m} \frac{\partial M_n}{\partial X'_i} dx_n + \int_L \frac{N_n}{EA_m} \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} dx_n + \int_L \frac{T_n}{GJ_m} \frac{\partial T_n}{\partial X'_i} dx_n + \int_L \frac{Q_n}{GAv_m} \frac{\partial Q_n}{\partial X'_i} dx_n \right) \quad (10)$$

Em trabalhos desenvolvidos por [1,2,4] entre outros, verifica-se que a influência dos esforços cortantes, representa aproximadamente 5% do resultado final e, em muitos casos pode ser desconsiderada, representando uma simplificação significativa nos cálculos. No estudo de caso, apresentado no item 3.1, é mostrada a variação percentual da influência dos esforços cortantes no resultado final. Nos demais estudos de casos, não se considera esta influência em função, da análise apresentada no referido item.

## 3.2. Casos em análise

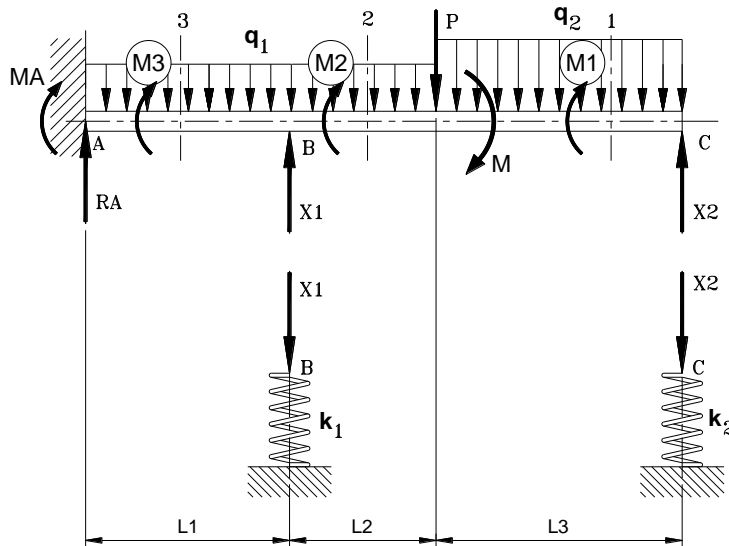
### 3.2.1. Viga estaticamente indeterminada apoiada em duas molas

Considere a viga estaticamente indeterminada, engastada em uma das extremidades e apoiada sobre duas molas de constantes elásticas  $k_1 = 20000$  [kN/m] e  $k_2 = 30000$  [kN/m], aplicadas nos apoios “B” e “C” respectivamente. A viga tem rigidez à flexão constante, sendo  $E = 21$  [GPa] e  $I = 8,748E-4$  [m<sup>4</sup>], onde  $EI = 18370,8$  [kNm<sup>2</sup>] e esta sujeita as cargas uniformemente distribuídas  $q_1 = 2,0$  [kN/m] e  $q_2 = 4,0$  [kN/m], uma carga concentrada  $P = 10,0$  [kN] e a um momento concentrado  $M = 20,0$  [kNm]. A viga tem dimensões  $L_1 = 3,0$  [m],  $L_2 = 2,0$  [m] e  $L_3 = 4,0$  [m], conforme representada na Figura 1 a seguir.



**Figura 1** - Viga estaticamente indeterminada.

A representação dos cortes adotados, bem como a definição das constantes hiperestáticas, estão representados na Figura 2 a seguir.



**Figura 2** - Cortes e constantes hiperestaticas.

Para a determinação destes esforços, momento fletor e esforços contantes, consideram-se os cortes 1, 2 e 3, definidos conforme a distribuição das cargas e dos apoios. Os apoios “B” e “C” serão definidos como superabundantes, sendo  $X_1$  e  $X_2$  as constantes hiperestaticas. Nesta etapa, considera-se  $X'_i$  ( $i = 1$  e  $2$ ), como cargas virtuais.

Corte 1:  $0 \leq x_1 \leq L_3$

$$M_1 = -\frac{q_2}{2} x_1^2 + X'_2 x_1 [kNm] \tag{11.a}$$

$$Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -q_2 x_1 + X'_2 [kN] \tag{11.b}$$

Corte 2:  $L_3 \leq x_2 \leq (L_2 + L_3)$

$$M_2 = -\frac{q_1}{2} (x_2 - L_3)^2 - q_2 L_3 \left( x_2 - \frac{L_3}{2} \right) - M - P(x_2 - L_3) + X'_2 x_2 [kNm] \tag{12.a}$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{\partial x_2} = -q_1 (x_2 - L_3) - q_2 L_3 - P + X'_2 [kN] \tag{12.b}$$

Corte 3:  $(L_2+L_3) \leq x_3 \leq (L_1+L_2+L_3)$

$$M_3 = -\frac{q_1}{2}(x_3-L_3)^2 - q_2L_3\left(x_3 - \frac{L_3}{2}\right) - M - P(x_3-L_3) + X'_1[x_3-(L_2+L_3)] + X'_2 x_3 \text{ [kNm]} \quad (13.a)$$

$$Q_3 = \frac{\partial M_3}{\partial x_3} = -q_1(x_3-L_3) - q_2L_3 - P + X'_1 + X'_2 \text{ [kN]} \quad (13.b)$$

Os coeficientes de flexibilidades são obtidos através das Equações (6) à (8), devido ao esforço cortante e ao momento fletor, aplicáveis neste caso. Substituindo-se os dados do problema nas Equações (11) à (13) e conseqüentemente nas Equações (6) à (8), obtêm-se os coeficientes de flexibilidade. Logo, a equação de compatibilidade dos deslocamentos, Equação (9), se escreve sob a forma:

$$\begin{aligned} -0,043106 + 0,000566X_1 + 0,001985X_2 &= 0 \\ -0,247882 + 0,001985X_1 + 0,013338X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Resolvendo-se simultaneamente as Equações (14), resulta nas constantes hiperestáticas:  $X_1 = 22,98$  [kN] e  $X_2 = 15,16$  [kN]. Sendo as reações nos apoios “B” e “C” respectivamente, que torna a viga estáticamente determinada. Considerando apenas a influência do momento fletor, a equação de compatibilidade dos deslocamentos, Equação (9), se escreve sob a forma:

$$\begin{aligned} -0,042255 + 0,000540X_1 + 0,001960X_2 &= 0 \\ -0,246274 + 0,001960X_1 + 0,0132608X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Resolvendo-se simultaneamente as Equações (15), tem-se:  $X_1 = 23,41$  [kN] e  $X_2 = 15,11$  [kN]. Neste caso, o esforço cortante altera em aproximadamente 2% o resultado final.

Analisando-se a viga pelo programa de elementos finitos Ansys®, considerando o elemento BEAM3 para a viga e o elemento COMBIN14 para as molas, obteve-se os seguintes resultados:  $X_1 = 23,415$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_1 = 1,17 \cdot 10^{-3}$  [m] e  $X_2 = 15,111$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_2 = 5,04 \cdot 10^{-4}$  [m].

### 3.2.2. Viga estáticamente indeterminada apoiada em três molas

Considere a viga estáticamente indeterminada engastada no apoio “A” e apoiada sobre três molas de constantes elásticas  $k_1 = 20000$  [kN/m],  $k_2 = 25000$  [kN/m] e  $k_3 = 30000$  [kN/m], nos apoios “B”, “C” e “D” respectivamente. A viga tem rigidez à flexão constante  $EI = 18370,8$  [kNm<sup>2</sup>] e esta sujeita as cargas uniformemente distribuídas  $q_1 = 2,0$  [kN/m] e  $q_2 = 4,0$  [kN/m], uma carga concentrada  $P = 10,0$  [kN] e a um momento concentrado  $M = 20,0$  [kNm] e, tem dimensões  $L_1 = 3,0$  [m],  $L_2 = 2,0$  [m] e  $L_3 = 4,0$  [m], conforme representada na Figura 3 a seguir.

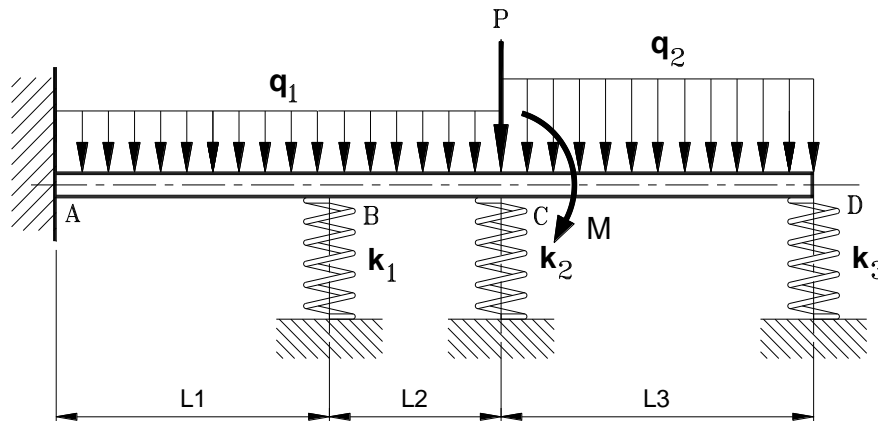
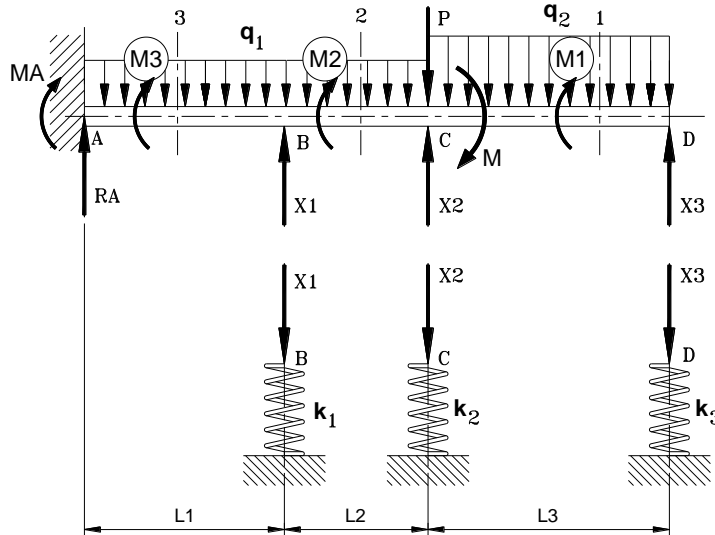


Figura 3 - Viga estáticamente indeterminada.

A representação dos cortes adotados, bem como a definição das constantes hiperestáticas, estão representados na Figura 4 à seguir.

Com base na verificação feita no item 3.1, será considerada apenas a influência dos momentos fletores, para tanto, consideram-se os cortes 1, 2 e 3, definidos conforme a distribuição das cargas e dos apoios. Definem-se os apoios “B”, “C” e “D” como superabundantes, sendo  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  as constantes hiperestáticas. Nesta etapa, considera-se  $\bar{X}_i$  ( $i = 1, 2$  e  $3$ ), como cargas virtuais.



**Figura 4 - Cortes e constantes hiperestáticas.**

Corte 1:  $0 \leq x_1 \leq L_3$

$$M_1 = -\frac{q_2}{2} x_1^2 + X_3 x_1 \text{ [kNm]} \quad (16)$$

Corte 2:  $L_3 \leq x_2 \leq (L_2 + L_3)$

$$M_2 = -\frac{q_1}{2} (x_2 - L_3)^2 - q_2 L_3 \left( x_2 - \frac{L_3}{2} \right) - M - P(x_2 - L_3) + X_2 (x_2 - L_3) + X_3 x_2 \text{ [kNm]} \quad (17)$$

Corte 3:  $(L_2 + L_3) \leq x_3 \leq (L_1 + L_2 + L_3)$

$$M_3 = -\frac{q_1}{2} (x_3 - L_3)^2 - q_2 L_3 \left( x_3 - \frac{L_3}{2} \right) - M - P(x_3 - L_3) + X_1 [x_3 - (L_2 + L_3)] + X_2 (x_3 - L_3) + X_3 x_3 \text{ [kNm]} \quad (18)$$

Substituindo-se os dados do problema nas Equações (16) à (18) e conseqüentemente nas Equações (6) à (8), obtêm-se os coeficientes de flexibilidade devido apenas ao momento fletor. Logo, a equação de compatibilidade dos deslocamentos, Equação (9), se escreve sob a forma:

$$\begin{aligned} -0,042255 + 0,000540 X_1 + 0,000979 X_2 + 0,001960 X_3 &= 0 \\ -0,102858 + 0,000979 X_1 + 0,002308 X_2 + 0,004990 X_3 &= 0 \\ -0,246274 + 0,001960 X_1 + 0,004990 X_2 + 0,013261 X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Resolvendo-se simultaneamente as Equações (19), tem-se:  $X_1 = 1,08$  [kN],  $X_2 = 23,06$  [kN] e  $X_3 = 9,74$  [kN]. Sendo que  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , constantes hiperestáticas, são as reações nos apoios “B”, “C” e “D” respetivamente, que torna a viga estaticamente determinada.

Analisando-se a viga pelo programa de elementos finitos Ansys®, considerando o elemento BEAM3 para a viga e o elemento COMBIN14 para as molas, obteve-se os seguintes resultados:  $X_1 = 1,081$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_1 = 5,40 \cdot 10^{-5}$  [m],  $X_2 = 23,06$  [kN], para

o deslocamento vertical  $\delta_2 = 9,22 \cdot 10^{-4} [m]$  e  $X_3 = 9,735 [kN]$ , para o deslocamento vertical  $\delta_3 = 3,24 \cdot 10^{-4} [m]$ .

3.2.3. *Pórtico estaticamente indeterminado apoiada em duas molas*

Considere o pórtico estaticamente indeterminado engastado no apoio “A” e apoiado sobre duas molas no apoio “C”. As molas têm constantes elásticas  $k_1 = 25000 [kN/m]$  e  $k_2 = 40000 [kN/m]$  respectivamente. O pórtico tem rigidez à flexão constante  $EI = 246400 [kNm^2]$  e, esta sujeito as cargas uniformemente distribuídas  $q_1 = 4,0 [kN/m]$  e  $q_2 = 6,0 [kN/m]$  e a uma carga concentrada  $P = 10,0 [kN]$ . Tem dimensões  $L = 4,0 [m]$ ,  $H_1 = 2,0 [m]$  e  $H_2 = 4,0 [m]$ , conforme representada na Figura 5 a seguir.

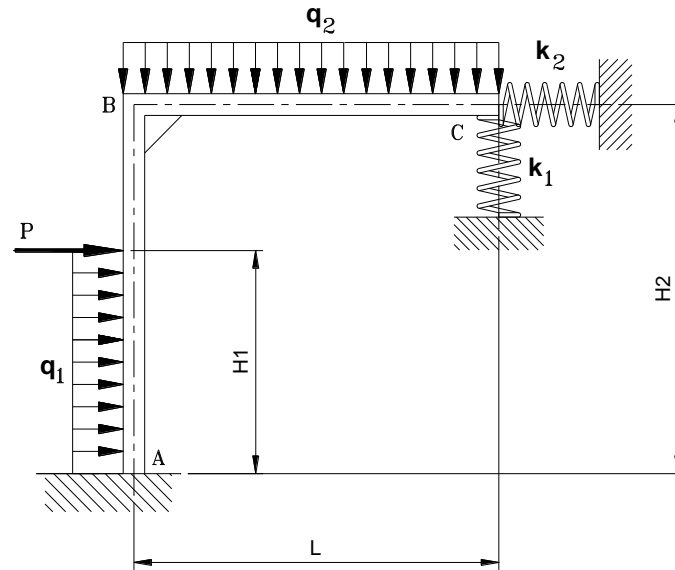


Figura 5 - Pórtico estaticamente indeterminado.

A representação dos cortes adotados, bem como a definição das constantes hiperestáticas, estão representados na Figura 6 à seguir.

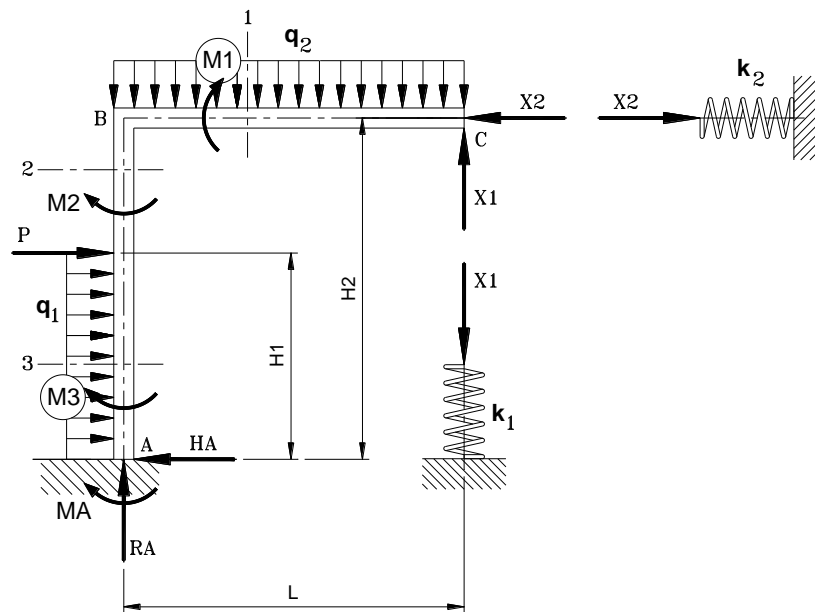


Figura 6 - Cortes e constantes hiperestáticas.



Para a determinação dos momentos fletores, considera-se os cortes 1, 2 e 3. Define-se o apoio "C" como superabundante, sendo  $X_1$  e  $X_2$  as constantes hiperestáticas. Nesta etapa, considera-se  $\bar{X}_i$  ( $i = 1$  e  $2$ ), como cargas virtuais.

Corte 1:  $0 \leq x_1 \leq L$

$$M_1 = -\frac{q_2}{2} x_1^2 + X'_1 x_1 [kNm] \quad (20)$$

Corte 2:  $0 \leq x_2 \leq (H_2 + H_1)$

$$M_2 = -\frac{q_2}{2} L^2 + X'_2 x_2 + X'_1 L [kNm] \quad (21)$$

Corte 3:  $(H_2 - H_1) \leq x_3 \leq H_2$

$$M_3 = -\frac{q_1}{2} [x_3 - (H_2 - H_1)]^2 - \frac{q_2}{2} L^2 - P[x_3 - (H_2 - H_1)] + X'_1 L + X'_2 x_3 [kNm] \quad (22)$$

Substituindo-se os dados do problema nas Equações (20) à (22) e consequentemente nas Equações (6) à (8), obtêm-se os coeficientes de flexibilidade. Logo, a equação de compatibilidade dos deslocamentos, Equação (9), se escreve sob a forma:

$$\begin{aligned} -0,004307 + 0,000386X_1 + 0,000130X_2 &= 0 \\ -0,001905 + 0,000130X_1 + 0,000112X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Resolvendo-se simultaneamente as Equações (23), resulta que:  $X_1 = 8,89$  [kN] e  $X_2 = 6,72$  [kN]. Sendo que  $X_1$  e  $X_2$  são as constantes hiperestáticas, que torna o pórtico estaticamente determinado.

Analisando-se o pórtico pelo programa de elementos finitos Ansys®, considerando o elemento BEAM3 para a viga e o elemento COMBIN14 para as molas, obteve-se os seguintes resultados:  $X_1 = 8,91$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_1 = 3,56 \cdot 10^{-3}$  [m] e  $X_2 = 6,68$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_2 = 1,67 \cdot 10^{-3}$  [m].

### 3.2.4. Treliça estaticamente indeterminada apoiada em duas molas

Considere a treliça estaticamente indeterminada articulada no nó "A", apoiada no nó "B" e apoiada sobre duas molas, uma vertical e outra horizontal, no nó "C". As molas têm constantes elásticas  $k_1 = 10000$  [kN/m] e  $k_2 = 20000$  [kN/m] respectivamente. As barras da treliça têm rigidez axial constante  $EA = 412334$  [kN] e, esta sujeita a uma carga concentrada  $P = 10$  [kN] inclinada de  $30^\circ$  com a vertical, aplicada no nó "C". A treliça tem dimensões  $L = 3,0$  [m] e  $H = 2,0$  [m], conforme representada na Figura 7 a seguir.

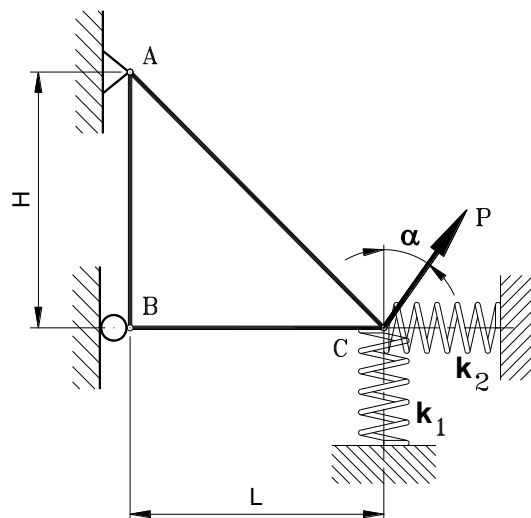


Figura 7 - Treliça estaticamente indeterminada.

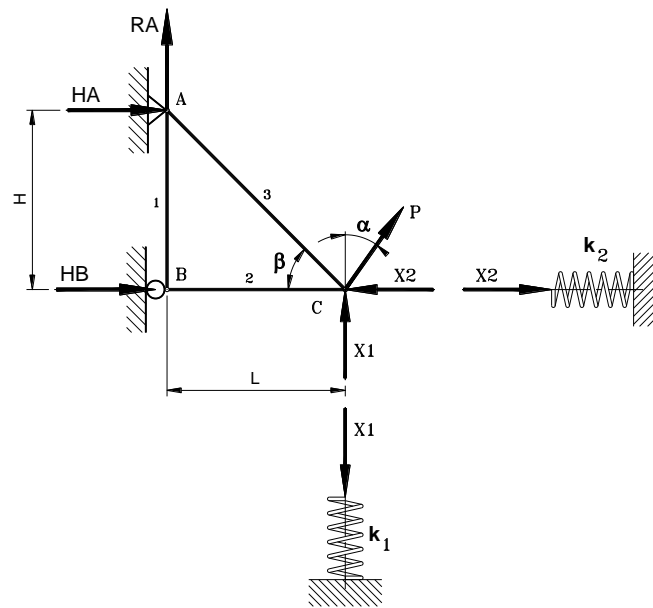


Figura 8 - Barras da treliça e constantes hiperestaticas.

Para a determinação das forças que atuam nas barras, define-se o apoio “C” como superabundante, sendo  $X_1$  e  $X_2$  as constantes hiperestaticas. Nesta etapa, considera-se  $\bar{X}_i$  ( $i = 1$  e  $2$ ), como cargas virtuais. Os coeficientes de flexibilidades são obtidos através das Equações (6) à (8), devido apenas o esforço interno normal. Sendo que  $N_n$  e  $L_n$  são constantes em cada barra, as equações podem ser apresentadas na seguinte forma:

$$\delta_{i0} = \frac{1}{EA} \sum_1^n \left( N_n L_n \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} \right) \tag{24}$$

$$\delta_{ii} = \frac{1}{k_i} + \frac{1}{EA} \sum_1^n \left[ \left( \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} \right)^2 L_n \right] \tag{25}$$

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EA} \sum_1^n \left( \frac{\partial N_n}{\partial X'_i} \frac{\partial N_n}{\partial X'_j} L_n \right) \tag{26}$$

A equação de compatibilidade dos deslocamentos, Equação (9), se escrevem sob a forma:

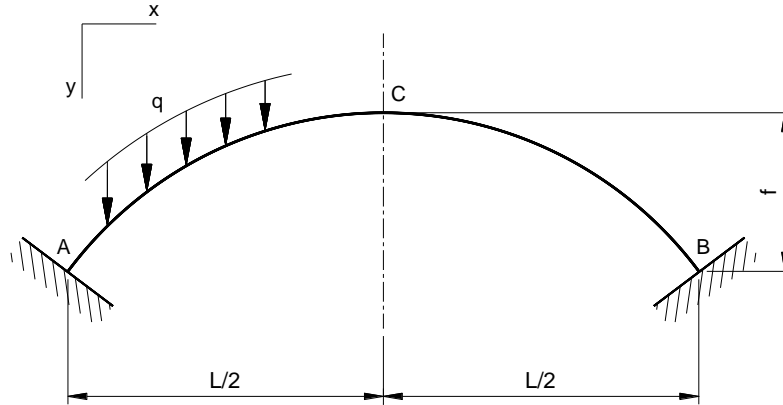
$$\begin{aligned} 4,425 \cdot 10^{-4} + 1,448 \cdot 10^{-4} X_1 - 1,091 \cdot 10^{-5} X_2 &= 0 \\ -1,309 \cdot 10^{-4} - 1,091 \cdot 10^{-5} X_1 + 5,723 \cdot 10^{-5} X_2 &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Resolvendo-se simultaneamente as Equações (27), resulta que:  $X_1 = -2,926$  [kN] e  $X_2 = 1,730$  [kN].

Analisando-se a treliça pelo programa de elementos finitos Ansys®, considerando o elemento LINK1 para as barras e o elemento COMBIN14 para as molas, obteve-se os seguintes resultados:  $X_1 = -2,926$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_1 = 2,93 \cdot 10^{-4}$  [m] e  $X_2 = 1,726$  [kN], para o deslocamento vertical  $\delta_2 = 8,64 \cdot 10^{-5}$  [m].

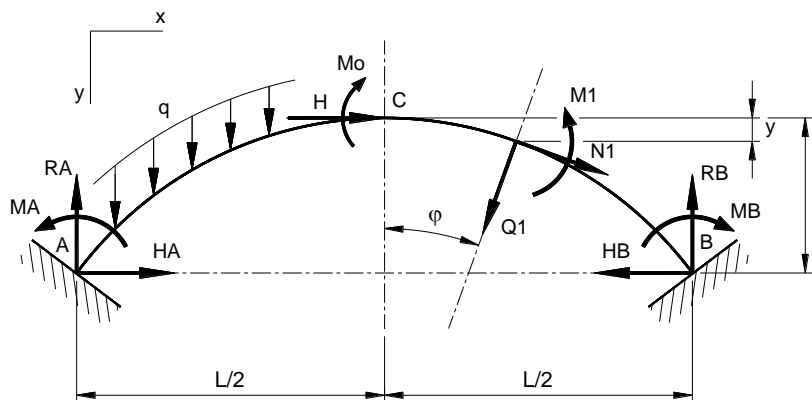
### 3.2.5. Arco parabólico simétrico bi-engastado

Considere o arco parabólico simétrico engastado nos apoios “A” e “B”, o vão entre os apoios é  $L = 10$  [m], altura máxima  $f = 3$  [m] e sujeito a uma carga uniformemente distribuída  $q = 6,0$  [kN/m]. Considera-se que o eixo do arco é uma parábola definida pela equação  $y = 4fx^2/L^2$ . A seção transversal é retangular e constante de largura  $b = 120$  [mm] e altura  $h = 300$  [mm], sendo  $E = 21$  [GPa].



**Figura 9** - Arco parabólico simétrico bi-engastado.

Neste caso será aplicado o “Theorem of Last Work” para a determinação das constantes hiperestáticas. O modelo para a análise do arco com as reações nos apoios, esforços internos e constantes hiperestáticas, estão representados na Figura 10 à seguir.



**Figura 10** - Modelo para a análise do arco parabólico.

Da condição de simetria, à partir do ponto “C”, tem-se:

$$\text{Tan}(\varphi) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{8fx}{L^2} \tag{28}$$

Portanto:

$$\text{Cos}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{8fx}{L^2}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \text{Sen}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{8fx}{L^2}\right)^2}} \tag{29}$$

Transferindo-se as cargas da metade esquerda do arco, para o ponto “C”, tem-se:

$$M_o = \frac{qL^2}{8} - MA - Hf \quad \text{sendo que} \quad RA = \frac{qL}{2} \tag{30.a,b}$$

Analisando o corte 1 à partir do ponto “C”, desprezando o efeito dos esforços cortantes, tem-se:

$$M_1 = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL^2}{8} - MA - H(f - y) \quad (31)$$

$$N_1 = -qx\text{Sen}(\varphi) - H\text{Cos}(\varphi) \quad (32)$$

Da equação (10), tem-se:

$$\delta_{HC} = 0 = \int_0^L \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial H} dx + \int_0^L \frac{N_1}{EA} \frac{\partial N_1}{\partial H} dx \quad (33)$$

$$\theta_C = 0 = \int_0^L \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial MA} dx \quad (34)$$

Resolvendo-se as equações (33) e (34), resulta que:  $H = 24,7672$  [kN] e  $MA = 0,4656$  [kNm].

Analisando-se o arco parabólico pelo programa de elementos finitos Ansys®, considerando o elemento BEAM3 para o arco, obteve-se os seguintes resultados:  $H = 24,664$  [kN] e  $MA = 0,4158$  [kNm].

### 3. Comentários e conclusões

O modelo proposto baseado nas equações clássicas de Timoshenko e Young [1] e nos trabalhos de Hibbeler [2] (2013), apresentam bons resultados comparados aos resultados numéricos obtidos pelo programa de elementos finitos Ansys®. As considerações adotadas quanto a desconsiderar os efeitos dos esforços cortantes, não afetaram significativamente os resultados finais apresentados. Os resultados apresentados, com base nas teorias clássicas, podem auxiliar na análise de elementos estruturais, sendo mais uma fonte de consulta auxiliando na definição dos parâmetros estruturais e nas condições de contorno.

### Referências

- [1] S. P. Timoshenko, D. H. Young. Theory of Structures. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [2] R. C. Hibbeler. Análise das Estruturas, Pearson, Engenharia edition, 2013.
- [3] Swanson Analysis Systems (ANSYS). Engineering Analysis System. Theoretical Manual. Swanson Analysis Systems, 1989.
- [4] H. L. Soriano, S. S. Lima. Análise de Estruturas - Método das Forças e Método dos Deslocamentos, Editora Moderna Ltda, São Paulo, 2006.

### ORCID

A. M. Ilkiu      0000-0001-8186-3075 (<https://orcid.org/0000-0001-8186-3075>)