

Análise das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para vigas em diferentes condições de contorno

Analysis of Bernoulli and Timoshenko beam theories for beams in different boundary conditions

T.C. Silva^{a†}

^a *Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Civil Rio de Janeiro, Brasil*[†]
Autor para correspondência: thiagocunha0307@gmail.com

RESUMO

Neste artigo é analisado o comportamento estrutural de vigas utilizando as teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko alterando-se a relação entre o vão e a altura da seção transversal e variando a condição de contorno do elemento estrutural. A geometria dos elementos estruturais analisados foram vigas de seção retangular, pôde-se constatar que para vigas isostáticas o efeito da distorção devido ao cisalhamento (teoria de Timoshenko) tem pouca influência no aumento dos deslocamentos, em vigas contínuas esse efeito passa a ter uma maior contribuição, enquanto que para viga bi-encastada esse efeito contribui de maneira significativa para o aumento dos deslocamentos na estrutura. Foram propostas relações limites de tamanho de vão e altura da seção transversal em função da condição de contorno para a consideração da distorção por cisalhamento.

ABSTRACT

In this article, the structural behavior of beams is analyzed using the beam theories of Bernoulli and Timoshenko, changing the relationship between the span and the height of the cross section and varying the boundary condition of the structural element. The geometry of the structural elements analyzed were beams of rectangular section, it could be seen that for isostatic beams the effect of distortion due to shear (Timoshenko's theory) has little influence on the increase of displacements, in continuous beams this effect has a greater contribution, while for fixed ends beams this effect contributes significantly to the increase of displacements in the structure. Limit relationships of span size and cross-section height as a function of the boundary condition were proposed for the consideration of shear distortion.

Palavras-chave:

Viga de
Timoshenko;
Coeficiente de
cisalhamento;
Análise estrutural.

Keywords:

Timoshenko's beam;
Shear coefficient;
Structural analysis.

1. Introdução

No dimensionamento estrutural algumas hipóteses devem ser estabelecidas afim de criar um modelo matemático para caracterizar determinado fenômeno físico. Na engenharia estrutural pode-se citar como as teorias mais importantes as de viga de Bernoulli e de Timoshenko.

A teoria de viga de Bernoulli consiste em admitir, que para pequenas deformações, as seções transversais permanecem planas e perpendiculares à linha neutra. Tal hipótese é válida somente quando a viga está submetida a pequenas deformações e pequenos deslocamentos, para grandes deformações e deslocamentos tal hipótese não é mais válida.

A teoria de viga de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento que ocorre na seção transversal, ou seja, as seções não necessariamente ficam planas em relação à seção

transversal, isto é, ocorre o empenamento da seção. Tal efeito torna-se considerável para vigas de baixa relação entre o vão e a altura da seção. De forma análoga à teoria de viga de Bernoulli tais hipóteses são válidas somente para vigas de pequenas deformações e deslocamentos.

A teoria de viga de Timoshenko pode ser vista como a teoria mais precisa do ponto de vista físico do problema, haja vista que ela se aproxima mais do comportamento real da estrutura por considerar em sua formulação o efeito do cisalhamento, que é desconsiderado na teoria de viga de Bernoulli. Entretanto, o coeficiente de cisalhamento, oriundo da teoria de viga de Timoshenko, ainda é objeto de muitos estudos, como pode ser visto em [1,2].

Existem inúmeros trabalhos que visam quantificar de forma mais precisa o coeficiente de cisalhamento da teoria de viga de Timoshenko. [1] apresenta uma compilação de diversas expressões para o valor do coeficiente de cisalhamento para diversos tipos de seções, [3] apresenta correções do fator de cisalhamento com base nos eixos principais de inércia para seções não simétricas e [2] apresenta uma nova abordagem para determinação do efeito do coeficiente de cisalhamento considerando os métodos energéticos.

2. Teoria de viga de Timoshenko

Os deslocamentos da teoria de viga de Timoshenko são dados por

$$u_x = -z\varphi \quad (1)$$

$$u_y = 0 \quad (2)$$

$$u_z = w(x) \quad (3)$$

Onde φ é a rotação total da seção, que considera a rotação devido à distorção por cisalhamento e devido à flexão da viga e w é o deslocamento ao longo do eixo z .

As equações de equilíbrio são dadas pelas seguintes equações diferenciais

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) = q(x) \quad (4)$$

$$\frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{kGA} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (5)$$

A teoria de viga de Timoshenko se reduz à teoria de viga de Bernoulli quando a expressão 6 for próxima de zero, ou seja

$$\frac{EI}{kL^2GA} \ll 1 \quad (6)$$

Onde EI é a rigidez à flexão, GA é a rigidez transversal, L é o comprimento do elemento, e k é o coeficiente de cisalhamento.

Combinando as equações 4 e 5 para uma viga homogênea de seção transversal constante tem-se

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{kGA} \frac{d^2q}{dx^2} \quad (7)$$

O momento fletor e a força cortante são dadas por

$$M = -EI \frac{d\varphi}{dx} \quad (8)$$

$$V = kGA \left(-\varphi + \frac{dw}{dx} \right) \quad (9)$$

A dedução da formulação da teoria de viga de Timoshenko pode ser vista de forma mais detalhada em [4,5]. A Figura 1 mostra a diferença na consideração entre os dois modelos de viga em uma viga encastrada e livre de seção transversal retangular constante.

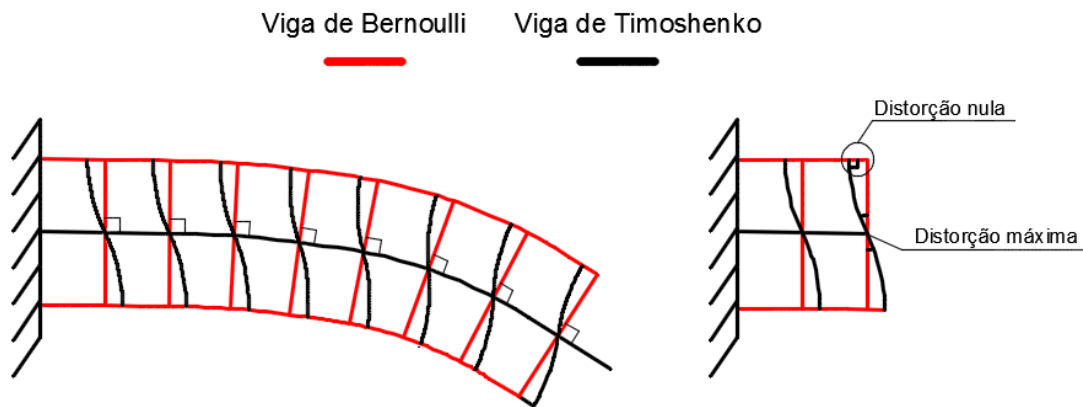


Figura 1 - Modelo de viga de Bernoulli e Timoshenko.

Embora o emprego da teoria de viga de Bernoulli seja o mais abordado nas universidades, a teoria de viga de Timoshenko representa o comportamento mais próximo da realidade, conforme apresentado em [6], sendo recomendável que mesmo com pouca diferença entre os métodos seja utilizada a teoria de viga de Timoshenko.

3. Coeficiente de cisalhamento

Diversos autores propuseram uma grande variedade de fórmulas para o parâmetro do coeficiente de cisalhamento, conforme abordado em [1], algumas formulações são apresentadas em sequência.

Cowper cit. por [1] apresenta a seguinte fórmula para o cálculo do coeficiente de cisalhamento em seções retangulares.

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (10)$$

O valor considerado de $k=5/6$ é obtido somente quando o coeficiente de Poisson é nulo, o que constitui uma aproximação que não corresponde à realidade. Existem outras formulações semelhantes à equação 10 que levam em consideração a relação entre a base e a altura da seção, pode-se citar as formulações de Stephen cit. por [1] e Hutchinson cit. por [1], contudo há pouca discrepância de valores para tais formulações, principalmente para uma elevada razão entre a base e a altura da seção.

Em seções circulares, Hutchinson cit. por [1] apresenta a seguinte expressão para o coeficiente de cisalhamento.

$$k = \frac{6(1 + \nu)^2}{7 + 12\nu + 4\nu^2} \quad (11)$$

Outras formulações são apresentadas em [1] para seções circulares. Verifica-se a partir dos estudos de [1,2] que o coeficiente de cisalhamento é função do coeficiente de Poisson e da relação entre as dimensões da seção transversal.

É interessante notar que os valores do coeficiente de cisalhamento para seção circular e retangular, quando admitido coeficiente de Poisson nulo, chegam ao mesmo valor obtido pelas expressões de Cowper cit. por [1].

Os coeficientes apresentados são válidos para seções cujo centro de cisalhamento seja coincidente com o centro de gravidade da seção, [7,8] demonstram que para seções cujo centro de cisalhamento difira do centro de gravidade ocorrem mudanças em sua formulação.

Uma das dificuldades da implementação da teoria de Timoshenko na análise estrutural está na determinação do coeficiente para determinadas seções. Segundo [7], embora os coeficientes de cisalhamento propostos em literatura tenham bases sólidas, ainda há relutância em sua aceitação pois as explicações não são totalmente convincentes e sua eficácia não tem sido avaliada para uma variedade de aplicações.

Demais coeficientes de cisalhamento foram omitidos desse estudo por não serem usuais na prática, contudo, recomenda-se os trabalhos de [1,2,3,7] para maior conhecimento sobre o assunto.

4. Formulação matricial

Soriano [9] apresenta a formulação matricial pelo método dos deslocamentos considerando o efeito de deformação devido à força cortante, O efeito da deformação devido à força cortante é dado pela expressão 12.

$$\varphi = \frac{12EI}{GA \cdot L^2 k} \quad (12)$$

A matriz de rigidez de um elemento de barra, considerando o efeito da distorção devido ao cisalhamento, é dada por

$$K := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(4 + \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(2 - \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(2 - \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(4 + \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

5. Análise numérica

As análises efetuadas nos itens 5.1, 5.2 e 5.3 foram realizadas com auxílio do software Mathcad tendo como base as rotinas implementadas em [9]. O carregamento adotado em todos os exemplos foi distribuído com intensidade de 20 kN/m, variou-se a altura da seção para cada situação mantendo a base constante com valor de 20 cm.

Admitiu-se a resistência característica de compressão do concreto é $f_{ck}=30$ MPa e foi considerado o módulo de elasticidade secante proposto pela NBR 6118 [10] dado pela expressão 14

$$E = 4760 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 26,07 \text{ GPa} \quad (14)$$

O coeficiente de cisalhamento foi obtido por meio da equação 10 admitindo-se coeficiente de Poisson $\nu=0,2$ obtendo-se

$$k = \frac{10(1 + 0,2)}{12 + 2,2} = 0,845 \quad (15)$$

É interessante ressaltar que o valor obtido na expressão 15 é muito próximo do valor normalmente utilizado para seções retangulares de 5/6 tendo uma diferença inferior a 2%.

5.1. Viga biapoiada

Tabela 1 e a Tabela 2 apresentam os resultados obtidos para o deslocamento máximo em uma viga biapoiada dado pela Figura 2.

Os resultados obtidos na Tabela 1 e Tabela 2 são consistentes com os dados apresentados em [9,11], haja vista que o efeito da distorção por cisalhamento não influencia de forma significativa os deslocamentos, apenas para uma baixa relação entre o vão e a altura da seção. Oñate cit. por [12] relata que para uma relação vão/altura inferior a 10 deve-se aplicar a teoria de viga de Timoshenko, ou seja, considerando uma diferença de 2% nos deslocamentos em relação à teoria de Bernoulli, que consiste em um critério aceitável para se utilizar o coeficiente de cisalhamento.

O dimensionamento de vigas de elevada esbetez pela Teoria de Timoshenko ou Bernoulli não é usual, contudo, o parâmetro objeto de estudo foi a influência do efeito da distorção devido ao cisalhamento na seção em função da razão entre a altura da viga e o comprimento do vão. Assim, a esbetez da seção não influenciou os resultados obtidos.

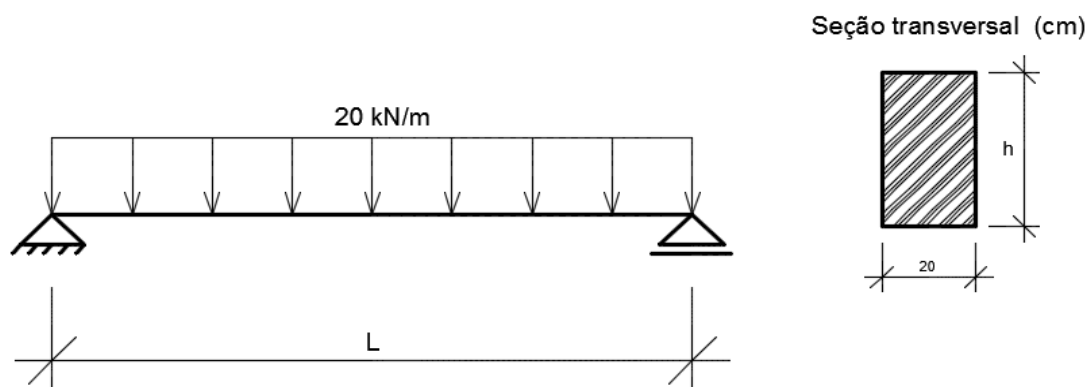


Figura 2 - Modelo estrutural viga biapoiada.

Tabela 1 - Viga biapoiada com vão de 10 metros.

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Diferença absoluta (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)					
222.421	221.967	300	0.454	1.00	10	33.3
93.983	93.642	400	0.341	1.00	10	25.0
48.217	47.945	500	0.272	1.01	10	20.0
27.973	27.746	600	0.227	1.01	10	16.7
17.667	17.473	700	0.194	1.01	10	14.3
11.876	11.705	800	0.171	1.01	10	12.5
8.372	8.221	900	0.151	1.02	10	11.1
6.129	5.993	1000	0.136	1.02	10	10.0
4.627	4.503	1100	0.124	1.03	10	9.1
3.582	3.468	1200	0.114	1.03	10	8.3
2.833	2.728	1300	0.105	1.04	10	7.7
2.281	2.184	1400	0.097	1.04	10	7.1
1.867	1.776	1500	0.091	1.05	10	6.7
1.548	1.463	1600	0.085	1.06	10	6.3
1.3	1.22	1700	0.08	1.07	10	5.9
1.103	1.028	1800	0.075	1.07	10	5.6
0.945	0.874	1900	0.071	1.08	10	5.3
0.817	0.749	2000	0.068	1.09	10	5.0

Tabela 2 - Viga biapoiada com vão de 5 metros.

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Diferença absoluta (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)					
13.986	13.873	300	0.113	1.01	5	16.7
5.938	5.853	400	0.085	1.01	5	12.5
3.065	2.997	500	0.068	1.02	5	10.0
1.791	1.734	600	0.057	1.03	5	8.3
1.141	1.092	700	0.049	1.04	5	7.1
0.774	0.732	800	0.042	1.06	5	6.3
0.552	0.514	900	0.038	1.07	5	5.6
0.409	0.375	1000	0.034	1.09	5	5.0
0.312	0.281	1100	0.031	1.11	5	4.5
0.245	0.217	1200	0.028	1.13	5	4.2
0.197	0.17	1300	0.027	1.16	5	3.8
0.161	0.137	1400	0.024	1.18	5	3.6
0.134	0.111	1500	0.023	1.21	5	3.3
0.113	0.091	1600	0.022	1.24	5	3.1
0.096	0.076	1700	0.02	1.26	5	2.9

0.083	0.064	1800	0.019	1.30	5	2.8
0.073	0.055	1900	0.018	1.33	5	2.6
0.064	0.047	2000	0.017	1.36	5	2.5

5.2. Viga bi-encastada

A Tabela 3 e a Tabela 4 apresentam os resultados obtidos para o deslocamento máximo em uma viga bi-encastada dado pela Figura 3.

A razão entre os deslocamentos na teoria de viga de Timoshenko e Bernoulli obtidos na viga encastada foram significativamente superiores em comparação à razão obtida na condição de contorno de viga biapoiada. Esse resultado está de acordo com [4] onde foi realizado um estudo da carga crítica de flambagem considerando as teorias de Bernoulli e Timoshenko para uma viga encastada e foi constatado que os deslocamentos oriundos da teoria de viga de Timoshenko foram significativamente superiores aos de Bernoulli.

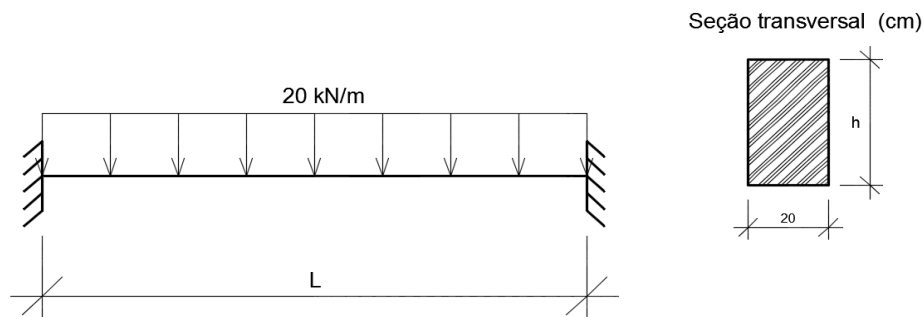


Figura 3 - Modelo estrutural viga bi-encastada.

Tabela 3 - Viga bi-encastada com vão de 10 metros.

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Diferença absoluta (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)					
44.847	44.393	300	0.454	1.01	10	33.3
19.069	18.728	400	0.341	1.02	10	25.0
9.861	9.589	500	0.272	1.03	10	20.0
5.776	5.549	600	0.227	1.04	10	16.7
3.689	3.495	700	0.194	1.06	10	14.3
2.511	2.341	800	0.17	1.07	10	12.5
1.796	1.644	900	0.152	1.09	10	11.1
1.335	1.199	1000	0.136	1.11	10	10.0
1.024	0.901	1100	0.123	1.14	10	9.1
0.807	0.694	1200	0.113	1.16	10	8.3
0.65	0.546	1300	0.104	1.19	10	7.7
0.534	0.437	1400	0.097	1.22	10	7.1
0.446	0.355	1500	0.091	1.26	10	6.7
0.378	0.293	1600	0.085	1.29	10	6.3
0.324	0.244	1700	0.08	1.33	10	5.9

0.281	0.206	1800	0.075	1.36	10	5.6
0.246	0.175	1900	0.071	1.41	10	5.3
0.218	0.15	2000	0.068	1.45	10	5.0

Tabela 4 - Viga bi-encastada com vão de 5 metros.

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Diferença absoluta (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)					
2.888	2.775	300	0.113	1.04	5	16.7
1.256	1.171	400	0.085	1.07	5	12.5
0.667	0.599	500	0.068	1.11	5	10.0
0.404	0.347	600	0.057	1.16	5	8.3
0.267	0.218	700	0.049	1.22	5	7.1
0.189	0.146	800	0.043	1.29	5	6.3
0.141	0.103	900	0.038	1.37	5	5.6
0.109	0.075	1000	0.034	1.45	5	5.0
0.087	0.056	1100	0.031	1.55	5	4.5
0.072	0.043	1200	0.029	1.67	5	4.2
0.06	0.034	1300	0.026	1.76	5	3.8
0.052	0.027	1400	0.025	1.93	5	3.6
0.045	0.022	1500	0.023	2.05	5	3.3
0.04	0.018	1600	0.022	2.22	5	3.1
0.035	0.015	1700	0.02	2.33	5	2.9
0.032	0.013	1800	0.019	2.46	5	2.8
0.029	0.011	1900	0.018	2.64	5	2.6
0.026	0.0094	2000	0.0166	2.77	5	2.5

5.3. Viga contínua

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento máximo em uma viga contínua dado pela Figura 4.

Os deslocamentos obtidos na viga contínua foram superiores ao de viga isostática e inferiores ao de viga bi-encastada, pode-se verificar que com o aumento do grau de hiperestaticidade da estrutura maior foi a influência da teoria de viga de Timoshenko no deslocamento.

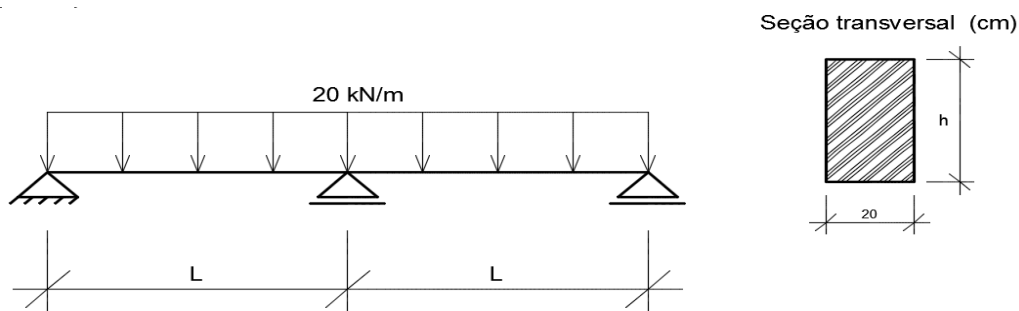


Figura 4 - Modelo estrutural viga contínua.

Tabela 5 - Viga contínua de dois vãos.

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Diferença absoluta (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)					
5.881	5.753	300	0.128	1.02	5	16.7
2.523	2.427	400	0.096	1.04	5	12.5
1.319	1.243	500	0.076	1.06	5	10.0
0.783	0.719	600	0.064	1.09	5	8.3
0.508	0.453	700	0.055	1.12	5	7.1
0.351	0.303	800	0.048	1.16	5	6.3
0.256	0.213	900	0.043	1.20	5	5.6
0.194	0.155	1000	0.039	1.25	5	5.0
0.151	0.117	1100	0.034	1.29	5	4.5
0.122	0.09	1200	0.032	1.36	5	4.2
0.1	0.071	1300	0.029	1.41	5	3.8
0.084	0.057	1400	0.027	1.47	5	3.6
0.071	0.046	1500	0.025	1.54	5	3.3
0.062	0.038	1600	0.024	1.63	5	3.1
0.054	0.032	1700	0.022	1.69	5	2.9
0.048	0.027	1800	0.021	1.78	5	2.8
0.043	0.023	1900	0.02	1.87	5	2.6
0.039	0.019	2000	0.02	2.05	5	2.5

6. Análise dos resultados

Constata-se dos resultados apresentados que a teoria de viga de Timoshenko, em comparação com a teoria de viga de Bernoulli, gerou maiores deslocamentos em todos os casos apresentados, como de fato é relatado em literatura técnica.

Observa-se que o aumento dos deslocamentos na teoria de viga de Timoshenko não é função apenas de características da seção ou da relação entre o vão e a altura da seção transversal, mas também é dada em função da condição de contorno da estrutura.

As estruturas apresentadas nos itens 5.1, 5.2 e 5.3 apresentaram maiores deslocamentos pela teoria de viga de Timoshenko do que pela teoria de Bernoulli. Verifica-se que em estruturas cuja restrição de apoio esteja na rotação (engastado) a teoria de viga de Timoshenko apresenta deslocamentos mais acentuados. O grau de hiperestaticidade também influencia na diferença entre os deslocamentos, quanto maior o grau de hiperestaticidade da estrutura, maior a influência dos deslocamentos pela teoria de viga de Timoshenko.

7. Conclusões

Observou-se neste artigo que o efeito da distorção por cisalhamento não deve ser negligenciado no dimensionamento estrutural, podendo chegar a uma diferença de até mais que o dobro em comparação com a teoria de Bernoulli.

Diante dos resultados apresentados recomenda-se que seja levado em consideração o efeito da distorção por cisalhamento, não apenas em vigas de grande altura ou de baixa relação entre o vão e a altura da seção, mas também deve-se utilizar como parâmetro a condição de contorno adotada no elemento estrutural.

Em vigas garantidamente isostáticas deve-se utilizar o efeito da distorção devido ao cisalhamento quando a razão entre o vão e a altura for menor que 10, pois abaixo desse valor ocorre uma diferença entre os deslocamentos superior a 2%

Em vigas engastadas a distorção devido ao cisalhamento deve ser considerada quando a razão entre o vão e a altura for inferior a 25, haja vista que para valores abaixo desses ocorre um aumento dos deslocamentos superior a 2%.

Em vigas contínuas deve-se verificar a relação entre a altura da seção e o vão de cada tramo da viga, recomenda-se que quando esta relação for inferior a 20 seja utilizada a teoria de Timoshenko para o cálculo das deformações, pois para valores inferiores a esse os deslocamentos ficam 2% maiores.

Os valores mencionados estipulam que não pode haver uma discrepância maior que 2% nos deslocamentos em comparação com a teoria de Bernoulli, entretanto, tais relações que foram recomendadas podem ser substituídas, desde que não sejam superiores a 5%, pois deve-se levar em consideração ainda os efeitos de fluência do concreto. Cabendo ao engenheiro decidir qual teoria mais apropriada deve ser utilizada.

Vale ressaltar que a teoria de viga de Timoshenko é a que, teoricamente, representa com maior precisão o comportamento estrutural, devendo, sempre que possível, utilizá-la na análise estrutural.

Referências

- [1] A. Faghidian. Unified Formulations of the Shear coefficients in Timoshenko Beam Theory. *J. Eng. Mech.*, 143 (2017). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001297](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001297).
- [2] K. T. Chan, K. F. Lai, N. G. Stephen, K. Young. A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory. *J. Sound and Vib.*, 14 (2011) 3488-3497.
- [3] S. B. Dong, C. Alpdogan, E. Taciroglu. Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. *Int. J. Solids Struct.*, 13 (2010) 1651-1665. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.02.018>.
- [4] L. F. Martha, R. Burgos. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial, In: XXXVI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, 12-14 de Novembro, Montevidéu, Uruguai, 2014.
- [5] S. Timoshenko, J. Gere. *Mecânica dos Sólidos*, Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- [6] S. Timoshenko, J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [7] S. B. Dong, S. Çarbas, E. Taciroglu. On principal shear axes for correction factors in Timoshenko beam theory. *Int. J. Solids Struct.*, 50 (2013) 1681-1688. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.01.034>.
- [8] R. Barretta, A. Barretta. Shear stresses in elastic beams: an intrinsic approach. *Eur. J. Mech. A Solids*, 29 (2010) 400-409. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.10.008>.
- [9] H. L. Soriano. *Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional*, Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2005.
- [10] Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). NBR 6118, Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento, 2014.
- [11] L. F. Martha. *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos*, Elsevier, Rio de Janeiro, 2010.
- [12] J. Silva, I. Lemes, R. Silveira, A. Silva. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas, In: Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 6-9 de Novembro, Brasília, DF, 2016.

ORCID

T. C. Silva 0000-0002-3942-9723 (<https://orcid.org/0000-0002-3942-9723>)